

# ESTIMÉES DES NOYAUX DE GREEN ET DE LA CHALEUR SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES.

GILLES CARRON

RÉSUMÉ. On majore les noyaux de Green et de la chaleur au dehors de la diagonale pour des opérateurs de type laplacien sur les espaces symétriques.

## 1. INTRODUCTION

On considère ici un espace symétrique  $X = G/K$  de type non compact. À une représentation unitaire  $(\rho, V)$  de dimension finie de  $K$ , on associe le fibré vectoriel  $G \times_K V$  au dessus de  $X$ , dont l'espace des sections lisses s'identifie à

$$C^\infty(E) \simeq \{ \sigma \in C^\infty(G, V), \forall g \in G, \forall k \in K : f(gk) = \rho(k^{-1}) f(g) \}$$

L'objet de cet article est un opérateur de type laplacien  $G$ -invariant agissant sur les sections de  $E$

$$L = \nabla^* \nabla + V$$

où  $\nabla$  est une connexion hermitienne  $G$  invariante sur  $E$  et  $R$  un section  $G$ -invariante du fibré des endomorphismes hermitiens de  $E$ . Nous donnons quelques estimations de la résolvante et du noyau de la chaleur associé à  $L$ . Notre premier résultat est le suivant :

**Théorème A.** *Notons  $\alpha_0$  le bas du spectre de l'opérateur  $L$ ,  $e = \text{Id} . K \in X$  et  $G_s(x, y)$  le noyau de Schwarz de la résolvante  $(L - \alpha_0 + s^2)^{-1}$  où  $s$  est un nombre complexe de partie réelle strictement positive. Il y a alors une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in X$  tel que  $d(x, o) \geq 2$  alors*

$$|G_s(x, o)| \leq C e^{-\rho(x^+) - \text{Re}(s)d(x, o)},$$

où on a noté  $x^+$  la composante suivant  $\bar{\mathfrak{a}}^+$  de  $x$  dans la décomposition de Cartan  $G = K e^{\bar{\mathfrak{a}}^+} K$  et  $\rho \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$  la demi somme des racines restreintes positives associées à  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a})$ .

Notre résultat est sensiblement meilleur que celui obtenu récemment par N. Lohoué et S. Mehdi à propos du laplacien de Hodge de Rham ; dans [7], en utilisant un théorème de Paley-Wiener de P. Delorme ([5]) et la théorie des représentations de  $G$ , ils obtiennent pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$  l'existence d'une constante  $C_\epsilon$  telle que pour tout  $x \in X$  tel que  $d(x, o) \geq 1$ ,

$$|G_s(x, o)| \leq C_\epsilon \Phi_0(x) e^{-(1-\epsilon)\text{Re}(s)d(x, o)},$$

où  $\Phi_0$  est la fonction sphérique élémentaire de Harish-Handra de  $G$ . On sait qu'il y a une constante telle que  $\Phi_0(x) \geq C e^{-\rho(x^+)}$ , en fait la fonction  $\Phi_0(x) e^{\rho(x^+)}$  croît polynomialement sur  $\bar{\mathfrak{a}}^+$  ([1]).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C35, 58J50 ; Secondary 22E40, 57T15.

*Key words and phrases.* espace symétrique, laplacien, noyau de Green, noyau de la chaleur, propagation à vitesse finie.

Cependant notre estimation n'est pas, en général, optimale. Par exemple pour les fonctions, on sait grâce au travail de J-P. Anker et L. Ji ([2, theorem 4.22 i]) que pour  $s > 0$ , l'on a une estimation de la forme

$$C^{-1}d(x, o)^{-\beta}\Phi_0(x)e^{-\rho(x^+)} \leq G_s(x, o) \leq C d(x, o)^{-\beta}\Phi_0(x)e^{-sd(x, o)}$$

où si on note  $\Sigma^{++}$  les racines positives indivisibles et  $l$  le rang de  $X$  alors  $\beta = |\Sigma^{++}| + \frac{l-1}{2}$ . En fait, on a l'estimation  $d(x, o)^{-\beta}\Phi_0(x) \leq C d(x, o)^{-\frac{l-1}{2}}e^{-\rho(x^+)}$ . Sur les fonctions, notre estimation est donc optimale en rang 1 et en rang supérieur, elle est optimale à un facteur polynomiale près ; notons également que grâce à [3, theorem 3.6], notre résultat est optimal pour le laplacien de Hodge-deRham en rang 1.

La preuve de notre estimation n'utilise que deux ingrédients à savoir un argument classique de propagation à vitesse finie et une estimation du volume de  $KB(x, 1) \subset X$ . Nous avons également obtenu une estimation du noyau de Schwarz de l'opérateur de la chaleur  $e^{-tL}$  par la même méthode. Pour énoncer ce résultat, on rappelle quelques notations sur la structure algébrique de  $X$ . On note  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$  les algèbres de Lie de  $K$  et  $G$  et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

la décomposition en espaces propres de l'involution de Cartan. Si  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  est une sous-algèbre abélienne maximale et  $\Sigma \subset \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$  le système restreint des racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ . On fixe alors  $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$  une chambre de Weil et on note  $\Sigma^+ \subset \Sigma$  le système des racines restreintes positives associés. Le rang de l'espace symétrique  $X$  est  $l = \dim \mathfrak{a}$  ; la dimension de l'espace symétrique  $X$  est notée  $d$ . L'espace  $\mathfrak{p}$  se décompose en

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{n}_\alpha.$$

où pour  $a \in \mathfrak{a}$  et  $n \in \mathfrak{n}_\alpha$ , nous avons  $\text{ad}(a)n = \alpha(a)n$ . On note aussi  $m_\alpha = \dim \mathfrak{n}_\alpha$  et donc  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ . Dans la décomposition de Cartan de  $G = Ke^{\mathfrak{a}^+}K$ , si  $x = gK \in X = G/K$ , on note  $x^+$  un élément de  $\bar{\mathfrak{a}}^+$  telle que  $gK \in Ke^{x^+}K$ . Notre estimation est alors la suivante :

**Théorème B.** *Notons  $h_t(x, y)$  le noyau de Schwarz de l'opérateur de la chaleur  $e^{-tL}$ . Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in X$  tel que  $d(x, e) \geq 2$  alors*

$$|h_t(x, e)| \leq C e^{-\alpha_0 t - \rho(x^+) - \frac{d(x, o)^2}{4t}} \phi_t(x)$$

où

$$\phi_t(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{t}}{d(x, o) + \sqrt{t}} & \text{si } d(x, o) \leq t \\ \frac{d(x, o)^{\frac{d+l}{2}-1}}{t^{\frac{d+l-1}{2}}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left( \frac{1 + \alpha(x^+)}{\frac{t}{d(x, o)} + \alpha(x^+)} \right)^{m_\alpha/2} & \text{si } d(x, o) \geq t \end{cases}$$

Cette majoration n'est également pas optimale. On peut comparer notre estimation avec celle obtenue par N. Lohoué et S. Mehdi à propos du laplacien de Hodge deRham [7] ; ils obtiennent pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$  des constantes  $C_\epsilon$  et  $A_\epsilon$  telles que si  $d(x, o) \geq A_\epsilon$  alors

$$|h_t(x, o)| \leq C_\epsilon \Phi_0(x) e^{-\alpha_0 t} e^{-(1-\epsilon)\frac{d(x, o)^2}{4t}} t^{-\epsilon\gamma}.$$

Notre estimation est donc meilleure lorsque  $d(x, o)$  tend vers l'infini mais bien plus mauvaise lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Dans le cas de l'espace hyperbolique réel et du laplacien scalaire, on peut vérifier avec l'estimation de E. Davies et N. Mandouvalos [4] que notre estimée est optimale dans le régime où  $d(x, o) \geq \max\{2, t\}$ .

## 2. UNE ESTIMÉE DE VOLUME

Nous démontrons ici le résultat suivant :

**Proposition 2.1.** *Il y a des constantes strictement positives  $c, C$  telle que pour tout  $\epsilon \in [0, 1[$  et  $x \in X$  alors*

$$ce^{2\rho(x^+)} \epsilon^l \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left( \frac{\epsilon + \alpha(x^+)}{1 + \alpha(x^+)} \right)^{m_\alpha} \leq \text{vol } KB(x, \epsilon) \leq Ce^{2\rho(x^+)} \epsilon^l \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left( \frac{\epsilon + \alpha(x^+)}{1 + \alpha(x^+)} \right)^{m_\alpha}.$$

*Démonstration.* Grâce à [2, lemme 2.1.2], nous savons que

$$KB(x, \epsilon) \simeq K \exp(B(x^+, \epsilon) \cap \bar{\mathfrak{a}}^+)$$

dans la décomposition de Cartan  $X = Ke^{\bar{\mathfrak{a}}^+}$ . Ainsi si  $J(h)dkdh$  est la forme volume de  $X$  dans les coordonnées  $(k, h) \mapsto ke^h K$  nous avons :

$$\text{vol } KB(x, \epsilon) = \int_{B(x^+, \epsilon) \cap \bar{\mathfrak{a}}^+} J(h)dh.$$

Cependant nous avons

$$J(h) = C \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \sinh^{m_\alpha}(\alpha(h)) \approx e^{2\rho(h)} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left( \frac{\alpha(h)}{1 + \alpha(h)} \right)^{m_\alpha}.$$

Grâce à la preuve de [2, lemme 2.1.6 i)], on en déduit que pour  $\epsilon \in ]0, 1[$  et  $h \in B(x^+, \epsilon) \cap \bar{\mathfrak{a}}^+$ , on a

$$\rho(x^+) - |\rho| \leq \rho(h) \leq \rho(x^+) + |\rho|$$

et pour  $\alpha \in \Sigma^+$ ,

$$|\alpha(h - x^+)| \leq \epsilon/\sqrt{2}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 + \alpha(x^+)) \leq 1 + \alpha(h) \leq 2(1 + \alpha(x^+))$$

$$\alpha(h) \leq \alpha(x^+) + \epsilon$$

On en déduit aisément la majoration annoncée.

Pour la minoration, on considère  $\Sigma^{+++} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un système de racines réduites qui est une base de  $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{C}}^*$  et  $E_1, \dots, E_l$  la base de  $\bar{\mathfrak{a}}$  duale à  $\Sigma^{+++}$ , si  $\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha = \sum_{i=1}^l x_i \alpha_i$ , on pose alors

$$v = \sum_i E_i.$$

Ainsi pour  $\alpha \in \Sigma^+$ , on a  $\alpha(v) \geq 1$ . On a bien évidemment

$$B\left(x^+ + \frac{\epsilon}{10+10|v|}v, \frac{\epsilon}{20+20|v|}\right) \subset B(x^+, \epsilon)$$

or sur  $B\left(x^+ + \frac{\epsilon}{10+10|v|}v, \frac{\epsilon}{20+20|v|}\right)$ , on a pour  $\alpha \in \Sigma^+$

$$\alpha \geq \alpha(x^+) + \frac{\epsilon}{10+10|v|}\alpha(v) - \frac{\epsilon}{20+20|v|} \geq \alpha(x^+) + \frac{\epsilon}{20+20|v|}.$$

On obtient ainsi facilement une minoration du volume de  $KB\left(x^+ + \frac{\epsilon}{10+10|v|}v, \frac{\epsilon}{20+20|v|}\right)$  et donc du volume de  $KB(x^+, \epsilon)$ .  $\square$

## 3. ESTIMATION DU NOYAU DE GREEN

Ici, on étudie le noyau de Schwarz de l'opérateur  $(L - \alpha_0 + s^2)^{-1}$  au dehors de la diagonale où  $s$  est un nombre complexe de partie réelle strictement positive. On commence par une estimée classique induite par la propriété de propagation à vitesse finie de l'opérateur  $\cos(t\sqrt{L - \alpha_0})$  (cf. par exemple [8, appendice D]).

**Lemme 3.1.** *Soit  $\sigma \in L^2(B(o, 1), E)$  et  $u := (L - \alpha_0 + s^2)^{-1}\sigma$  alors pour  $A := KB(x, 1)$  avec  $x \in X$  vérifiant  $d(x, o) \geq 2$ , on a*

$$\|u\|_{L^2(A)} \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} s)^2} e^{-\operatorname{Re}(s)(d(x, o) - 2)} \|\sigma\|_{L^2}.$$

*Démonstration.* En effet, on a

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{s\xi}}{s} \cos\left(\xi\sqrt{L - \alpha_0}\right) \sigma d\xi.$$

Les hypothèses faites sur  $x$  et  $\sigma$  et la propriété de propagation à vitesse finie implique que dès que  $0 \leq \xi \leq d(x, o) - 2$ , on a  $\|\cos(\xi\sqrt{L - \alpha_0}) \sigma\|_{L^2(A)} = 0$ . D'où

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(A)} &\leq \int_{d(x, o) - 2}^\infty \frac{e^{-\operatorname{Re}(s)\xi}}{|s|} \left\| \cos\left(\xi\sqrt{L - \alpha_0}\right) \sigma \right\|_{L^2(A)} d\xi \\ &\leq \int_{d(x, o) - 2}^\infty \frac{e^{-\operatorname{Re}(s)\xi}}{|s|} \left\| \cos\left(\xi\sqrt{L - \alpha_0}\right) \sigma \right\|_{L^2(X)} d\xi \\ &\leq \int_{d(x, o) - 2}^\infty \frac{e^{-\operatorname{Re}(s)\xi}}{|s|} \|\sigma\|_{L^2(X)} d\xi \\ &\leq \frac{1}{(\operatorname{Re} s)^2} e^{-\operatorname{Re}(s)(d(x, o) - 2)} \|\sigma\|_{L^2}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.** *Il y a une constante  $C$  qui ne dépend que que  $X$  et  $s$  telle qu'il y a un  $k \in K$  tel que*

$$\|u\|_{L^2(B(kx, \frac{1}{4}))} \leq C e^{-\operatorname{Re}(s)d(x, o) - \rho(x^+)} \|\sigma\|_{L^2}.$$

*Démonstration.* En effet

$$\begin{aligned} \int_{KB(x, \frac{1}{4})} \left( \int_{B(y, \frac{1}{2})} |u|^2(z) dz \right) dy &= \int_{KB(x, 1)} \operatorname{vol}(B(z, 1/2) \cap KB(x, 1/4)) |u|^2(z) dz \\ &\leq C \int_{KB(x, 1)} |u|^2(z) dz. \end{aligned}$$

On en déduit donc l'existence d'un  $y \in KB(x, \frac{1}{4})$  tel que

$$\left( \operatorname{vol} KB\left(x, \frac{1}{4}\right) \right)^{1/2} \|u\|_{L^2(B(y, 1/2))} \leq C e^{-\operatorname{Re}(s)d(x, o)} \|\sigma\|_{L^2}.$$

Il y a donc un  $k \in K$  telle que  $d(y, kx) \leq \frac{1}{4}$  et d'où  $B(kx, \frac{1}{4}) \subset B(y, \frac{1}{2})$  et grâce à l'estimée (2.1) :  $\operatorname{vol}(KB(x, \frac{1}{4}))^{1/2} \approx e^{\rho(x^+)}$ , on obtient bien le résultat annoncé. □

On utilise alors l'estimée elliptique standard suivante :

**Proposition 3.3.** *Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il y a une constante  $C$  qui dépend de  $X, \lambda, L$  telle que si  $r \in ]0, 1]$  et si  $v \in L^2(B(x, r), E)$  vérifie  $Lv = \lambda v$  alors*

$$|v(x)| \leq \frac{C}{r^{d/2}} \|v\|_{L^2(B(x, r))}.$$

On en déduit donc l'estimation :

$$|u(kx)| \leq Ce^{-\operatorname{Re}(s)d(x, o) - \rho(x^+)} \|\sigma\|_{L^2}.$$

Ceci implique que

$$\left( \int_{B(o, 1)} |G_s(kx, y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq Ce^{-\operatorname{Re}(s)d(x, o) - \rho(x^+)}.$$

Les mêmes estimées elliptiques fournissent alors la majoration suivante :

$$\text{pour } d(x, o) \geq 2 : |G_s(kx, o)| = |G_s(x, o)| \leq Ce^{-\operatorname{Re}(s)d(x, o) - \rho(x^+)}.$$

Ce qui démontre le théorème (A).

#### 4. ESTIMATION DU NOYAU DE LA CHALEUR

On étudie maintenant de la même façon le noyau de Schwarz de l'opérateur de la chaleur  $e^{-tL}$  au dehors de la diagonale. Nous commençons par le même type d'estimations :

**Lemme 4.1.** *Soit  $\sigma \in L^2(B(o, \epsilon), E)$  et  $f_t := e^{-tL}\sigma$  alors pour  $A := KB(x, \epsilon)$  avec  $x \in X$  vérifiant  $d(x, o) \geq 2\epsilon$ , on a*

$$\|f_t\|_{L^2(A)} \leq \frac{e^{-\alpha_0 t}}{\sqrt{\pi t}} \int_{d(x, o) - 2\epsilon}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi \|\sigma\|_{L^2}.$$

Cette estimation se montre de la même façon que l'estimée en partant de la formule :

$$f_t = \frac{e^{-\alpha_0 t}}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \cos\left(\xi \sqrt{L - \alpha_0}\right) \sigma d\xi.$$

En reprenant la preuve du lemme (3.2), on obtient que si de plus  $\epsilon \in ]0, 1/2]$  alors on trouve un  $k \in K$  tel que

$$\|f_t\|_{L^2(B(kx, \frac{\epsilon}{4}))}^2 \leq C \frac{\epsilon^d}{\operatorname{vol} KB(x, \epsilon)} \|f_t\|_{L^2(A)}^2.$$

Maintenant, on utilise l'estimation parabolique suivante :

**Proposition 4.2.** *Il y a une constante  $C$  (qui ne dépend que de  $X, L$ ) telle que si  $r \in ]0, 1]$  et si  $v \in L^2([t - r^2, t] \times B(x, r), E)$  est une solution de l'équation :*

$$\frac{\partial}{\partial t} v + Lv = 0$$

alors

$$|v(t, x)|^2 \leq \frac{C}{r^{d+2}} \int_{t-r^2}^t \left( \int_{B(x, r)} |v(\tau, y)|^2 dy \right) d\tau.$$

Il y a donc une constante  $C$  tel que pour  $\epsilon \in ]0, 1/2]$  et  $t \geq 2\epsilon^2$  alors

$$|f_t(kx)|^2 \leq \frac{C}{\epsilon^{d+2}} \int_{[t-\epsilon^2, t] \times B(kx, \frac{\epsilon}{4})} |f_\tau(y)|^2 d\tau dy.$$

Avec l'estimation

$$\int_A^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi = \sqrt{t} \int_{A^2/4t}^\infty e^{-v} \frac{dv}{\sqrt{v}} \leq \frac{C\sqrt{t}}{\frac{A}{\sqrt{t}} + 1} e^{-A^2/4t},$$

on obtient, pour  $t \geq 2\epsilon^2$  et  $d(x, o) \geq 2$ , l'estimée suivante

$$|f_t(kx)| \leq C (\text{vol } KB(x, \epsilon))^{-1/2} \frac{\sqrt{t}}{d(x, o) + \sqrt{t}} e^{-\alpha_0 t - \frac{(d(x, o) - 2\epsilon)^2}{4t}} \|\sigma\|_{L^2}.$$

On en déduit que

$$\left( \int_{B(o, \epsilon)} |h_t(kx, y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq C (\text{vol } KB(x, \epsilon))^{-1/2} \frac{\sqrt{t}}{d(x, o) + \sqrt{t}} e^{-\alpha_0 t - \frac{(d(x, o) - 2\epsilon)^2}{4t}}.$$

Les mêmes estimées paraboliques donnent alors la majoration suivante : pour  $\epsilon \in ]0, 1/2]$ ,  $t \geq 3\epsilon^2$  et  $d(x, o) \geq 2$  :

$$|h_t(kx, o)| = |h_t(x, o)| \leq C (\epsilon^d \text{vol } KB(x, \epsilon))^{-1/2} \frac{\sqrt{t}}{d(x, o) + \sqrt{t}} e^{-\alpha_0 t - \frac{(d(x, o) - 2\epsilon)^2}{4t}}.$$

Or nous avons

$$\frac{(d(x, o) - 2\epsilon)^2}{4t} = \frac{d(x, o)^2}{4t} - \frac{d(x, o)\epsilon}{t} + \frac{\epsilon^2}{t}.$$

Donc lorsque  $d(x, o) \leq t$  on choisit  $\epsilon = 1/100$  et on obtient la majoration :

$$|h_t(x, o)| \leq C \frac{\sqrt{t}}{d(x, o) + \sqrt{t}} e^{-\alpha_0 t - \frac{d(x, o)^2}{4t} - \rho(x^+)}$$

Lorsque  $d(x, o) \geq t$  on choisit  $\epsilon = \frac{t}{100d(x, o)}$  et on obtient pour  $d(x, o) \geq 2$

$$\begin{aligned} |h_t(x, o)| &\leq C \frac{\sqrt{t}}{d(x, o)} \left( \frac{d(x, o)}{t} \right)^{\frac{d+l}{2}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left( \frac{1 + \alpha(x^+)}{\frac{t}{100d(x, o)} + \alpha(x^+)} \right)^{m_\alpha/2} e^{-\alpha_0 t - \frac{d(x, o)^2}{4t} - \rho(x^+)} \\ &\leq C \frac{d(x, o)^{\frac{d+l}{2}-1}}{t^{\frac{d+l-1}{2}}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left( \frac{1 + \alpha(x^+)}{\frac{t}{d(x, o)} + \alpha(x^+)} \right)^{m_\alpha/2} e^{-\alpha_0 t - \frac{d(x, o)^2}{4t} - \rho(x^+)} \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème (B).

## 5. APPLICATIONS

Dans [3], une estimation du prolongement analytique de la résolvante avait été obtenue ; cependant les méthodes rudimentaires utilisées ici ne permettent pas d'obtenir un tel résultat. Néanmoins, nos estimées comme celle de N.Lohoué et S. Mehdi permettent une estimation inférieure du bas du spectre de l'opérateur  $L$  sur des espaces localement symétriques  $\Gamma \backslash G/K$  où  $\Gamma \subset G$  est un sous-groupe discret sans torsion.

**Définition :** (cf. [3, theorem 2.7]) Soit  $\Gamma \subset G$  est un sous-groupe discret sans torsion, on note  $\tilde{\delta}(\Gamma)$  l'exposant critique modifié de  $\Gamma$  qui est l'exposant critique de la série de Poincaré :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\rho(\gamma^+) - sd(\gamma(o), o)}.$$

Notons  $G_s^0(x, y)$  le noyau de Green de l'opérateur  $(\Delta - |\rho|^2 + s^2)^{-1}$  agissant sur les fonctions. Grâce à notre estimation et à l'estimation inférieure de  $G^0$  de J-P. Anker et L.Ji

([2, Theorem 4.2.2]), on sait que pour tout  $s > 0$  et  $\eta \in ]0, s[$ , il y a une constante  $C_{s,\eta}$  tel que pour tout  $x, y \in X$ ,

$$|G_s(x, y)| \leq C_{s,\eta} G_{s-\eta}^0(x, y)$$

Le même raisonnement que celui utilisé pour démontrer [3, theorem 2.7] montre que :

**Théorème 5.1.** i) Si  $\tilde{\delta}(\Gamma) > 0$  alors le bas du spectre de  $L$  sur  $\Gamma \backslash G/K$  est minoré par  $\alpha_0 - (\tilde{\delta}(\Gamma))^2$ .

ii) Si  $\tilde{\delta}(\Gamma) \leq 0$  alors le bas du spectre de  $L$  sur  $\Gamma \backslash G/K$  est minoré par  $\alpha_0$ .

iii) Si  $\tilde{\delta}(\Gamma) \leq 0$  et si le rayon d'injectivité de  $\Gamma \backslash G/K$  est non-majoré i.e.

$$\sup_{x \in X} \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma(x)) = \infty$$

alors le bas du spectre de  $L$  est  $\alpha_0$ .

**Remarques 5.2.** i) Cet exposant critique modifié se compare aisément à l'exposant critique de  $\Gamma$ , à savoir à  $\delta(\Gamma)$  l'exposant critique de la série

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\gamma(o), o)}.$$

Si on note  $\rho_{\min} = \inf_{H \in \mathfrak{a}_+} \rho(h)/|h|$  alors

$$\rho_{\min} + \tilde{\delta}(\Gamma) \leq \delta(\Gamma) \leq |\rho| + \tilde{\delta}(\Gamma)$$

ce qui permet de ré-obtenir le résultat de N. Lohoué et S. Mehdi [7, theorem 6.1].

ii) Lorsque  $\tilde{\delta}(\Gamma) < \sqrt{\alpha_0}$ , ce résultat implique que le noyau  $L^2$  de  $L$  sur  $\Gamma \backslash G/K$  est trivial. Il est cependant difficile d'obtenir des calculs explicites de  $\alpha_0$ . Concernant le laplacien de Hodge-deRham sur les formes différentielles des calculs explicites sont fait par H. Donnelly, E. Pedon en rang 1 ([6, 9, 10]) et par N. Lohoué et S. Medhi pour certains espaces hermitiens [7, Appendix A].

## RÉFÉRENCES

- [1] J.-P. Anker, La forme exacte de l'estimation fondamentale de Harish-Chandra. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), no. 9, 371–374.
- [2] J.-P. Anker, L. Ji, Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999) 1035–1091.
- [3] G. Carron et E. Pedon, On the differential form spectrum of hyperbolic manifolds, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **3** (2004), no. 4, 705–747.
- [4] E. Davies, N. Mandouvalos, Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups. *Proc. London Math. Soc. (3)* **57** (1988), no. 1, 182–208.
- [5] P. Delorme, Sur le théorème de Paley-Wiener d'Arthur. *Ann. of Math. (2)* **162** (2005), no. 2, 987–1029.
- [6] H. Donnelly, The differential form spectrum of hyperbolic space, *Manuscripta Math.* **33** (1981), 365–385.
- [7] N. Lohoué, S. Mehdi, Estimates for heat kernel and of the bottom of the spectrum of the form laplacian on locally symmetric spaces, prépublication 2007, annoncé dans *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math* **345** (2007) 119–122.
- [8] X. Ma, G. Marinescu, *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*. Progress in Mathematics, 254. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [9] E. Pedon, Harmonic analysis for differential forms on complex hyperbolic spaces, *J. Geom. Phys.* **32** (1999), 102–130.
- [10] E. Pedon, The differential form spectrum of quaternionic hyperbolic spaces. *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), no. 3, 227–265.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES JEAN LERAY (UMR 6629), UNIVERSITÉ DE NANTES, 2, RUE DE  
LA HOUSSINIÈRE, B.P. 92208, 44322 NANTES CEDEX 3, FRANCE  
*E-mail address:* Gilles.Carron@math.univ-nantes.fr